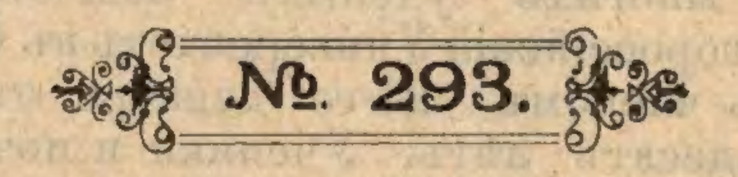
XXV Сем. № 6.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

15 Марта



№. 293.

1901 г.

Шарль Эрмитъ. *)

Пр. Доцента И. Тимченко въ Одессѣ.

1 (14) января скончался въ Парижѣ Эрмитъ, одинъ изъ величайшихъ математиковъ истекшаго XIX вѣка. Шарль Эрмитъ (Charles Hermite) родился въ Діёзѣ (Dieuse), небольшомъ городкѣ департамента Мёрты (Meurthe) во Франціи, 24 декабря 1822 года. Первоначальное образованіе онъ получилъ въ лицеѣ Людовика Великаго въ Парижѣ и, по окончаніи курса въ лицеѣ, поступилъ въ Политехническую Школу. Въ 1848 г. Эрмитъ былъ назначенъ репетиторомъ по математическому анализу и экзаменаторомъ на вступительныхъ экзаменахъ въ Политехнической Школѣ (examinateur d'admission), а въ 1863 г.—экзаменаторомъ на выпускныхъ и переводныхъ экзаменахъ въ той же Школѣ (examinateur de

*) Взявъ на себя любезно трудъ написать небольшую статью, посвященную памяти Ш. Эрмита, авторъ предупредилъ насъ, что онъ не считаетъ возможнымъ дать хотя бы и самую краткую характеристику его работъ, оставаясь вполнѣ въ предѣлахъ элементарной программы журнала. Труды Эрмита относятся къ наиболѣе сложнымъ областямъ высшаго математическаго анализа и въ настоящее время не поддаются популяризаціи. Принимая, однако, во вниманіе выдающееся мѣсто, которое покойный геометръ занималъ среди современныхъ математиковъ, читатель, вѣроятно, не посѣтуетъ на то, что мы посвятимъ Эрмиту нѣсколько страницъ, выходящихъ по своему содержанію за предѣлы нашей программы. *Ред.*

sortie et de classement). Съ 1862 г. онъ сталъ читать лекціи въ Нормальной Школѣ, а въ 1867 г., по смерти Дюгамеля, сдѣлался профессоромъ анализа въ Политехнической школѣ. Черезъ два года онъ получилъ каѳедру высшей алгебры въ Сорбоннѣ и оставался на этой каѳедрѣ до 1897 г. Въ 1856 г. Эрмитъ былъ избранъ, на мѣсто Бинэ, членомъ Парижской Академіи Наукъ. Онъ былъ, кромѣ того, членомъ почти всѣхъ существующихъ академій и очень многихъ ученыхъ обществъ. Въ 1892 г. и Императорскій Новороссійскій Университетъ въ Одессѣ избралъ его своимъ почетнымъ членомъ. 24-го декабря этого года Эрмиту исполнилось семьдесятъ лѣтъ. Ученики и почитатели знаменитаго ученаго отпраздновали этотъ день торжественнымъ собраніемъ, состоявшимся подъ предсѣдательствомъ министра народнаго просвѣщенія Дюпюи въ новой залѣ академическаго совѣта въ Сорбоннѣ. Здѣсь извѣстный французскій математикъ Пуанкарэ поднесъ Эрмиту, отъ лица всѣхъ его почитателей, выбитую въ честь его медаль съ его изображеніемъ, работы знаменитаго скульптора Шаплена; при этомъ онъ произнесъ рѣчь, посвященную обзору дѣятельности великаго математика. Эрмитъ занимаетъ выдающееся мѣсто среди математиковъ XIX вѣка; многія части математической науки обязаны ему своимъ развитіемъ; работы его относятся, однако, почти исключительно къ наиболѣе труднымъ и отвлеченнымъ отдѣламъ науки, къ тѣмъ, въ которыхъ, по выраженію Пуанкарэ, „царитъ чистое число“ — къ трансцендентному анализу, къ высшей алгебрѣ и ариѳметикѣ. Эрмитъ, кромѣ того, постоянно старался находить точки соприкосновенія между трансцендентнымъ анализомъ, алгеброй и теоріей чиселъ и разрабатывалъ такія теоріи, которыя связываютъ между собою эти, повидимому, разнородные отдѣлы чистой математики.

Первыя работы Эрмита, предпринятыя имъ еще въ бытность его ученикомъ Политехнической Школы, относятся къ дѣленію гиперэллиптическихъ функцій; онъ распространилъ на эти трансцендентныя открытый Якоби методъ дѣленія эллиптическихъ функцій. Въ силу этого метода, общая задача о дѣленіи приводится къ спеціальной; предполагая эту послѣднюю рѣшенной, можно найти посредствомъ извлеченія корней рѣшеніе главнаго алгебрическаго уравненія, къ которому приводится дѣленіе. Рѣшеніемъ этой задачи Эрмитъ не только открылъ путь къ дальнѣйшему изученію абелевыхъ функцій, но и нашелъ новый методъ изслѣдованія основныхъ вопросовъ алгебрическаго рѣшенія уравненій, которымъ съ успѣхомъ пользовался впослѣдствіи. О своихъ первоначальныхъ изысканіяхъ Эрмитъ сообщилъ чрезъ посредство Ліувилля—Якоби; великій кёнигсберскій математикъ не замедлилъ оцѣнить талантъ своего молодого послѣдователя и значеніе его открытій.

Продолжая свои работы о дѣленіи и преобразованіи абелевыхъ функцій, Эрмитъ встрѣтился съ различными вопросами алгебры и теоріи чиселъ и принялся за ихъ разработку. Результатомъ его изслѣдованій было возникновеніе цѣлой новой области

математическаго анализа: въ самомъ дѣлѣ, Эрмита можно считать, вмѣстѣ съ англійскими математиками Сильвестеромъ и Кейлеемъ, однимъ изъ основателей новѣйшей теоріи алгебрическихъ формъ, которыя до тѣхъ поръ разсматривались только въ частныхъ случаяхъ и въ ограниченной области примѣненій.

Въ Теоріи формъ, или цѣлыхъ однородныхъ функцій, на ряду съ основной формой разсматриваются другія, зависящія отъ ея коэффиціентовъ, образованія, названныя Сильвестеромъ „конкомитантами". Эти конкомитанты не измѣняются при линейномъ преобразованіи перемѣнныхъ формы, пріобрѣтая лишь множителя равнаго нѣкоторой степени модуля или детерминанта преобразованія. Они называются инваріантами, коваріантами и контраваріантами, смотря по тому, зависятъ ли они лишь отъ коэффиціентовъ формы, или еще отъ ея перемѣнныхъ, или, наконецъ, отъ новой системы перемѣнныхъ, претерпѣвающей при линейномъ преобразованіи данной системы обратное преобразованіе.

Эрмитъ установилъ въ теоріи формъ „законъ взаимности", въ силу котораго конкомитанты формъ двоичныхъ или съ двумя перемѣнными располагаются особымъ образомъ попарно. Разсматривая общія формы съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ, онъ показалъ, какъ можно выразить всѣ конкомитанты данной формы посредствомъ конечнаго числа нѣкоторыхъ изъ нихъ, получившихъ отъ него спеціальное названіе присоединенныхъ формъ (formes associées). Въ области общихъ квадратичныхъ формъ, полученные результаты привели его къ замѣчательному приложенію къ теоріи чиселъ. Онъ доказалъ такимъ образомъ, что всѣ квадратичныя формы съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ, имѣющія опредѣленный общій инваріантъ, распадаются на конечное число различныхъ классовъ, соотвѣтственно различнымъ цѣлымъ числамъ, которыя эти формы могутъ представлять. Рѣшеніе этой задачи теоріи чиселъ привело Эрмита ко введенію особаго вида коваріантовъ, называемыхъ „эвектантами".

Эрмитъ приложилъ еще теорію общихъ квадратичныхъ формъ къ опредѣленію числа вещественныхъ или мнимыхъ корней, заключенныхъ въ данныхъ предѣлахъ. Изслѣдуя, далѣе, ариѳметическое приведеніе формъ, онъ обратилъ вниманіе на то, что процессъ этотъ сводится въ сущности, въ случаѣ двоичныхъ формъ, къ вычисленію періодическихъ непрерывныхъ дробей. Распространяя это замѣчаніе на формы съ большимъ числомъ перемѣнныхъ, онъ нашелъ новые способы приближеннаго вычисленія ирраціональныхъ количествъ, приложимые къ уравненіямъ высшихъ степеней. Эти приближенныя вычисленія сводятся къ выполненію системъ періодическихъ дѣйствій, которыя представляютъ соотвѣтственныя ирраціональныя количества подобно тому, какъ непрерывныя дроби представляютъ квадратные корни.

Не малую роль въ изслѣдованіяхъ Эрмита играетъ такъ называемое „Чирнгаузеново преобразованіе" уравненія; онъ придалъ этому преобразованію видъ инваріанта, такъ что при этомъ

выступаетъ инваріативный характеръ преобразованнаго уравненія, которое, сверхъ того, должно зависѣть отъ наименьшаго числа параметровъ. Различныя резольвенты или разрѣшающія даннаго уравненія опредѣляются тогда сами собой, съ полной очевидностью. Въ случаѣ уравненія 5-ой степени, такими резольвентами служатъ модулярное уравненіе и уравненіе множителя, представляющіяся при преобразованіи 5-го порядка эллиптическихъ функцій. Пользуясь этимъ обстоятельствомъ, Эрмитъ, въ 1858 году, далъ особаго рода трансцендентное рѣшеніе уравненій пятой степени, общее алгебрическое рѣшеніе которыхъ, какъ извѣстно, невозможно.

Еще до Эрмита, Брингъ (въ 1786 г.) и Джеррардъ (въ 1834 г.) показали, что, съ помощью Чирнгаузенова преобразованія, можно привести общее уравненіе 5-й степени къ виду $x^5 - x - D = 0$. Сравнивъ эту форму уравненія 5-ой степени съ модулярнымъ уравненіемъ преобразованія 5-го порядка эллиптической функціи, связывающимъ количества $u = \sqrt[4]{k}$ и $v = \sqrt[4]{\lambda}$, гдѣ k первоначальный Лежандровъ модуль, а λ — происходящій изъ него посредствомъ преобразованія, Эрмитъ получилъ всѣ пять корней Джеррардова уравненія, въ видѣ произведеній выраженія

$$1:2\sqrt[4]{5^3}\,\varphi(\omega)\sqrt{1-\varphi^8(\omega)}$$

на пять трансцендентныхъ функцій

$$\Phi(\omega),\ \Phi(\omega+16),\ \Phi(\omega+32),\ \Phi(\omega+48),\ \Phi(\omega+64),\ \text{гдѣ}$$

$$\Phi(\omega)=\left[\varphi(5\omega)+\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\cdot\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+64}{5}\right)\right]\cdot\left[\varphi\left(\frac{\omega+32}{5}\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi\left(\frac{\omega+48}{5}\right)\right],$$

а $\varphi(\omega)$ — перемѣнная u—разсматриваемая, какъ функція отъ ω — отношенія мнимаго и вещественнаго періодовъ Якобіевыхъ эллиптическихъ функцій. Параметръ D связанъ съ величиной u равенствомъ $D = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\cdot\frac{1+u^8}{u^2\sqrt{1-u^8}}$, приводящимъ, для вычисленія k, къ уравненію 4-ой степени.

Дальнѣйшія работы Эрмита были посвящены теоріи эллиптическихъ функцій и, въ особенности, тѣмъ существенно важнымъ для этой теоріи функціямъ, которыя онъ назвалъ двойно-періодическими 2-го и 3-го родовъ—первая или вторая логариѳмическія производныя которыхъ представляютъ собой обыкновенныя двойно-періодическія функціи. И здѣсь, какъ и въ другихъ своихъ работахъ, Эрмитъ нашелъ приложенія къ совершенно чуждой, повидимому, области—къ теоріи чиселъ: тожества, связывающія найденные имъ въ теоріи эллиптическихъ функцій ряды, обнаруживаютъ замѣчательныя свойства цѣлыхъ чиселъ.

Я уже говорилъ о томъ, что Эрмитъ примѣнилъ обобщенную теорію непрерывныхъ дробей къ изслѣдованію алгебрическихъ ирраціональныхъ величинъ. Въ 1874 г. онъ примѣнилъ тотъ-же методъ непрерывныхъ дробей къ изслѣдованію показательной функціи и доказалъ такимъ образомъ трансцендентность числа *e*. Приложеніе методовъ Эрмита позволило, впослѣдствіи нѣмецкому математику Линдеману дать первое доказательство невозможности рѣшенія знаменитой задачи о квадратурѣ круга, съ помощью циркуля и линейки. Еще въ началѣ своей дѣтельности, при жизни Коши, Эрмитъ интересовался вопросами общей теоріи функцій мнимаго перемѣннаго и приложеніями ея къ трансцендентнымъ функціямъ; онъ пришелъ къ нѣкоторымъ соображеніямъ, относящимся къ этой теоріи, обратившимъ на себя вниманіе ея великаго основателя. Впослѣдствіи, послѣ появленія работъ Вейерштрасса, Эрмитъ принялъ участіе въ новѣйшемъ возрожденіи этой теоріи, происшедшемъ подъ вліяніемъ геніальныхъ идей нѣмецкаго математика, котораго Эрмитъ былъ горячимъ почитателемъ. Общая теорія аналитическихъ функцій обязана Эрмиту замѣчательнымъ предложеніемъ, которое останется навсегда связаннымъ съ его именемъ, подобно теоремѣ Пиѳагора, сферѣ и цилиндру Архимеда, теоремѣ Штурма, интегралу Коши. Это предложеніе служитъ основаніемъ теоріи аналитическихъ функцій отъ одной перемѣнной, разсматриваемыхъ какъ опредѣленные интегралы, въ которыхъ эта перемѣнная входитъ, какъ параметръ. Такая функція, будучи вообще многозначной, имѣетъ „искусственный“ разрѣзъ —зависящій отъ формы, въ которой она представляется—, служащій геометрическимъ мѣстомъ точекъ, въ которыхъ подинтегральная функція обращается въ безконечность, слѣдуя по пути интеграціи. Теорема Эрмита опредѣляетъ разность значеній функціи въ безконечно близкихъ другъ къ другу точкахъ, лежащихъ по различнымъ сторонамъ разрѣза.

Среди изслѣдованій Эрмита почти нѣтъ такихъ, которыя были бы посвящены спеціально приложеніямъ анализа къ другимъ отдѣламъ чистой или прикладной математики. Исключеніе представляетъ весьма важный въ этомъ отношеніи мемуаръ „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ эллиптическихъ функцій“, появившійся въ 1885 г. Въ этомъ мемуарѣ Эрмитъ интегрируетъ съ помощью двойно-періодическихъ функцій 2-го рода, одно дифференціальное уравненіе 2-го порядка, носящее названіе уравненія Ламэ. Онъ показываетъ, затѣмъ, многочисленныя приложенія полученныхъ имъ результатовъ къ механикѣ и математической физикѣ.

Таковы въ общихъ чертахъ важнѣйшіе труды великаго французскаго геометра; кромѣ этихъ крупныхъ работъ, въ его сочиненіяхъ разбросано много мелкихъ результатовъ, интересныхъ и полезныхъ формулъ, усовершенствованій въ изложеніи различныхъ аналитическихъ выводовъ, глубокихъ и остроумныхъ соображеній по поводу самыхъ обыденныхъ предметовъ математическаго анализа. Эрмитъ опубликовалъ множество мемуаровъ и статей. Его лекціи въ Политехнической Школѣ появились лишь

въ литографированномъ изданiи; онъ собирался издать полный „Курсъ Анализа Политехнической Школы“, но ему удалось выпустить въ свѣтъ въ 1873 году лишь первую часть—замѣчательную книгу, которая уже успѣла стать классической. Большой извѣстностью пользуются также его литографированныя лекцiи по теорiи функцiй, читанныя въ Сорбоннѣ въ 1881—82 г.г. и нѣсколько разъ переизданныя и передѣланныя авторомъ. Ученики и почитатели Эрмита не замедлятъ, конечно, издать полное собранiе его сочиненiй — воздвигнуть ему единственный достойный великаго ученаго памятникъ.

Свойства твердыхъ тѣлъ подъ давленiемъ, диффузiя твердаго вещества, внутреннiя движенiя въ твердомъ веществѣ.

W. Spring'a,

профессора университета въ Люттихѣ (Лiежѣ), члена Королевской Бельгiйской Академiи. Переводъ **Д. Шора** въ Геттингенѣ.

---

*(Продолженiе *).*

4. Спаиванiе твердыхъ тѣлъ путемъ сдавливанiя.—Мы только что видѣли, что сильное сдавливанiе вызываетъ въ большинствѣ твердыхъ тѣлъ свойства, на которыя прежде смотрѣли, какъ на характерныя для жидкаго состоянiя: твердыя тѣла текутъ и обладаютъ, какъ и жидкiя, упругостью безъ предѣла, когда ихъ подвергать, въ ихъ аллотропическомъ *устойчивомъ* состоянiи, гидростатическому сдавливанiю. Интересно посмотрѣть теперь, не раздѣляютъ ли твердыя тѣла при нормальныхъ условiяхъ температуры въ равной мѣрѣ свойства жидкостей смѣшиваться, *спаиваться*, если довести ихъ до физически дѣйствительнаго соприкосновенiя.

Нѣтъ необходимости распространяться болѣе подробно о

---

*) См. № 292 „Вѣстника“.

важности этого свойства для познанія природы сцѣпленія вообще, равно какъ и разъяснять, какія приложенія можетъ дать его изученіе [1]).

Первые опыты въ этой области были произведены W. Spring'омъ въ 1878 году [2]) и продолжены, затѣмъ, въ 1880-омъ [3]). Они показали, что матерія дѣйствительно обладаетъ способностью спаиваться въ твердомъ состояніи, когда ее подвергаютъ достаточно сильному давленію; но эта способность очень различна для различныхъ веществъ и даже совершенно не замѣтна у нѣкоторыхъ тѣлъ.

Эти опыты производились слѣдующимъ образомъ:

Въ цилиндръ сдавливающаго аппарата вводился мелкій порошокъ изслѣдуемаго вещества; затѣмъ туда медленно погружали пистонъ, посредствомъ отягощеннаго гирями рычага, пока онъ не производилъ сдавливанія, которое достигало 20000 атмосферъ. Вообще же достаточно было 10000 атмосферъ и даже меньше. Число тѣлъ различныхъ родовъ, надъ которыми производили эти опыты, было 83. Сводя результаты, можно сказать, что *всѣ тѣла, одаренныя свойствомъ измѣненія формы подъ давленіемъ, не ломаясь, т. е. тѣла ковкія, сливались такъ же крѣпко, какъ если бы они были предварительно расплавлены; другіе металлы не обнаружили и подъ этимъ огромнымъ давленіемъ способности къ сплавленію; они были извлечены изъ аппарата въ томъ же порошкообразномъ видѣ, въ какомъ они были туда введены.*

Въ частности, отдѣльные металлы дали результаты, соотвѣтствующіе болѣе или менѣе значительной ковкости ихъ. [4]) Спаиваніе было полное во всѣхъ тѣхъ частяхъ, гдѣ металлъ могъ *течь;* напримѣръ, на поверхности и въ щеляхъ аппарата. Не такъ совершенно было спаиванье въ центральной части цилиндра, гдѣ сгущеніе не могло имѣть мѣста въ той степени, въ какой оно происходило на поверхности.—Хлористыя, бромистыя и іодистыя щелочныя соли, азотнокислыя, сѣрноватистыя соли, фосфорная щелочная соль склеились замѣтнымъ образомъ. Онѣ дали куски, въ которыхъ слѣды первоначальныхъ зеренъ совершенно исчезли. Иногда въ нихъ можно было даже замѣтить начало прозрачности, очевидное свидѣтельство ихъ сліянія. Соли тяжелыхъ металловъ дали хорошій результатъ только на поверхности—тамъ; гдѣ вещество скользило вдоль стѣнки цилиндра. Въ этой области онѣ сформировались въ *прозрачную стеклообразную кору,* совершенно напоминая поверхности скольженія, которыя встрѣчаются въ древнеприподнятыхъ горныхъ породахъ; центръ былъ сцементированъ,

---

[1]) Въ лекціи, прочтенной на публичномъ собраніи Бельгійской Академіи, 17-го декабря 1899 года, W. Spring показалъ отношеніе этого свойства къ отвердѣванію нѣкоторыхъ горныхъ породъ.

[2]) *Bull. de l'Acad. de Belgique,* 2-e série, t. LXV, p. 746; 1878.

[3]) *Id.,* 2-e série, t. XLIX, p. 323; 1880.

[4]) Сдавливали: *свинецъ, висмутъ, олово, цинкъ, кадмій, алюминій, мѣдь, сурьму, платину.*

но остался зернистымъ и болѣе или менѣе рыхлымъ. Наконецъ, такія тѣла, какъ стекло, мѣлъ, алюминій, углеродъ и нѣкоторыя изъ углекислыхъ солей, дали только небольшое спаиванье или совсѣмъ не склеились: порошокъ остался совершенно рыхлымъ или же образовалъ массу безо всякой твердости.

Фактъ спаиванія твердыхъ тѣлъ подъ давленіемъ былъ провѣренъ сэромъ W. Roberts-Austen'омъ [1]), и констатированъ также Ch.-A. Fawsitt'омъ [2]), который, кажется, не зналъ о результатахъ, добытыхъ до него.

Мы не можемъ не упомянуть о сомнѣніи, которое было выражено по поводу роли сдавливанія въ этомъ явленіи. Находили болѣе вѣроятнымъ, что причиною спаиванія служитъ повышеніе температуры, вызванное сдавливаніемъ; это повышеніе температуры можетъ быть достаточно высоко, чтобы расплавить твердыя зерна на ихъ поверхности [3]). Едва ли необходимо доказывать, что этотъ взглядъ ошибоченъ. Дѣйствительно, во-первыхъ, лучше всего сплавляются не легкоплавкія вещества; во-вторыхъ, при тѣхъ условіяхъ, при которыхъ происходило сдавливаніе, повышеніе температуры было совершенно ничтожно [4]).

Если изслѣдовать обстоятельства, которыя могутъ вліять на явленіе спаиванія, становится очевиднымъ, что одно давленіе дѣйствительно не можетъ быть причиною его; въ противномъ случаѣ всѣ тѣла должны были бы спаяться при достаточномъ давленіи. Пластичность матеріи, на которую мы уже имѣли случай указать, несомнѣнно содѣйствуетъ спаиванію; но не она одна играетъ здѣсь роль, такъ какъ въ противномъ случаѣ *хрупкія* тѣла, какъ висмутъ, не спаивались бы такъ, какъ свинецъ. Необходимо принять во вниманіе нѣкоторый новый факторъ, имѣющій въ данномъ случаѣ тѣмъ болѣе важное значеніе, что и онъ содѣйствуетъ устраненію границы между твердыми и жидкими тѣлами; мы говоримъ о *диффузіи твердыхъ тѣлъ*. Явленіе спаиванія обязано своимъ существованіемъ главнымъ образомъ тому факту, что, благодаря давленію, возстановляется полное соприкосновеніе; а при этомъ молекулы осколковъ, которые соприкасаются другъ съ другомъ, *притягиваются взаимно*, на поверхности соединенія точно такъ же, какъ внутри массы. Желая дать опытное доказательство этого появленія сцѣпленія, мы пришли совершенно естественно къ изслѣдованію этого молекулярнаго явленія.

---

[1]) „*Results obtained in repeating the experiments of W. Spring (Physical Society*, p. 231; London, 1882).

[2]) *Schwlissen der Metalle bei niedrigen Temperaturen (Dingler's polyt. Journal*, t. CCXXXII, p. 482).

[3]) *Bull. de la Soc. géol. de France*, t. XII, p. 233.

[4]) Чтобы убѣдиться въ этомъ, сдавливали *форолъ*, который плавится при 28°, помѣщая наверху свинцовый шарикъ. Если бы это вещество расплавлялось, шарикъ упалъ бы на дно цилиндра, чего въ дѣйствительности не оказалось. (*Bull. de la Soc. Chimique*, t. XLI, p. 488; 1884).

5. **Диффузія твердыхъ тѣлъ.**—Хорошо изслѣдованные случаи *диффузіи одного твердаго тѣла въ другомъ* въ настоящее время довольно многочисленны. Первыя наблюденія этого рода принадлежатъ W. Spring'у. Онъ произвелъ ихъ во время работы, о которой мы только что упомянули. Руководящею нитью при изложеніи будетъ служить объясненіе, которое эти опыты даютъ явленію спаиванія твердыхъ тѣлъ. Мы позволимъ себѣ, поэтому, отклониться, разъ или два, отъ хронологическаго изложенія въ видахъ бо́льшей ясности. Затѣмъ, мы перейдемъ къ указанію важныхъ дополнительныхъ фактовъ, найденныхъ другими физиками.

Если спаиваніе твердыхъ тѣлъ дѣйствительно имѣетъ причиною диффузію молекулъ черезъ поверхности соприкосновенія, то необходимо, чтобы сдавливаніе различныхъ металловъ производило *сплавленіе*, а не одно только прилипаніе частичекъ, сохранившихъ при этомъ свои индивидуальныя свойства.

Опытъ подтверждаетъ это положеніе [1]). Сжимая смѣсь олова и мѣди въ порошкѣ, получаютъ бронзу; цинкъ и мѣдь даютъ латунь, съ характернымъ желтымъ цвѣтомъ золота; мѣдь и сурьма производятъ особенный фіолетовый сплавъ. Наконецъ, отъ сдавливанія смѣси изъ висмута, олова, свинца и кадмія образуется сплавъ, который растворяется въ кипящей водѣ совершенно такъ же, какъ сплавъ, полученный Lipowitz'омъ путемъ плавленія. Итакъ, образованіе этихъ сплавовъ обнаруживаетъ, что твердыя тѣла медленно диффундируютъ одно въ другомъ, подобно тому какъ какое-либо растворимое тѣло—въ растворителѣ. Такимъ образомъ слѣдуетъ принять, что твердыя тѣла обладаютъ способностью взаимно растворять другъ друга [2]) при температурѣ ниже ихъ точки плавленія, давая твердый растворъ.

Но, точно такъ же, какъ не всѣ тѣла растворяются въ данной жидкости, они не всѣ диффундируютъ съ одинаковою легкостью въ данномъ твердомъ тѣлѣ; въ томъ случаѣ, если *спаиваніе* есть дѣйствительно слѣдствіе *растворенія твердаго вещества*, необходимо, чтобы *такія* тѣла не только не образовывали сплава, но даже не спаивались бы подъ давленіемъ. Опытъ подтверждаетъ это положеніе. Извѣстно, что свинецъ и цинкъ въ расплавленномъ состояніи не растворяются взаимно; они отдѣляются другъ отъ друга, если ихъ смѣшать, какъ масло и вода. Только при высокихъ температурахъ растворимость этихъ металловъ становится замѣтною [3]); точно то же можно сказать и о висмутѣ и цинкѣ.

---

[1]) *Deutsche Chem. Gesellschaft*, t. XV, p. 593, *a;* 1882.

[2]) Знаменитый голландскій химикъ J. H. Van't Hoff пришелъ къ тому же заключенію, изучая аномаліи, наблюдаемыя при замерзаніи нѣкоторыхъ растворовъ (Zeitschrift für phys. Chemie, t. V, p. 322; 1890).

[3]) *См.* Spring et Romanoff, *Sur la solubilité réciproque du bismuth et du plombé dans le zinc (Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, 3-e série, t. XXII, p. 51; 1896).

Если сдавливать, при низкой температурѣ, смѣсь свинца и цинка въ порошкѣ (или висмута и цинка), получаютъ только *скученіе,* происходящее отъ обволакиванія цинка свинцомъ (или висмутомъ); полученная масса не однородна.

Можно привести еще одинъ фактъ показывающій, что диффузія твердыхъ тѣлъ есть одна изъ причинъ ихъ спаиванія подъ давленіемъ.

W. Spring констатировалъ сверхъ того, что спаиваніе металловъ [1]), равно какъ и составныхъ тѣлъ [2]), можетъ происходить *безъ всякаго сдавливанія*, при чемъ все-таки образуется сплавъ. Остается принять, что *диффузія* въ такомъ случаѣ есть единственная причина спаиванія. Вотъ какъ были произведены эти опыты:

Прежде всего обтесывали плоскія поверхности вещества, подвергавшагося опыту (золото, платина, серебро, мѣдь, цинкъ, свинецъ, сурьма, висмутъ и т. д.), вырѣзывая, посредствомъ точнаго токарнаго станка, прямое сѣченіе въ заранѣе сформированномъ цилиндрѣ. Эти цилиндры имѣли 2 сантиметра въ діаметрѣ и 5 сантиметровъ высоты; для золота и платины высота была только 3 милиметра.

Обтесанныя, абсолютно свѣжія плоскія поверхности прикладывались другъ къ другу, безъ давленія, если не считать собственнаго вѣса веществъ. Такъ какъ повышеніе температуры ускоряетъ диффузію тѣлъ очень замѣтнымъ образомъ, то металлическія пáры были помѣщены въ горячую баню, чтобы сократить продолжительность опытовъ. Температура была, однако, значительно ниже точки плавленія металловъ. Для платины, напримѣръ, она была на 1600 градусовъ ниже этой точки; для золота и мѣди приблизительно на 800 градусовъ ниже ихъ точки плавленія; и для металловъ болѣе плавкихъ приблизительно на 200 градусовъ. Продолжительность соприкосновенія была очень различна—отъ 3 до 12 часовъ—соотвѣтственно твердости металла.

Результатъ получился изумительный. Куски металловъ одного и того же рода настолько спаялись, что образовали одну массу. Спай не былъ замѣтенъ послѣ сглаживанія поверхности цилиндровъ на токарномъ станкѣ. Кромѣ того, пáры разничныхъ металловъ *сплавились.* Такъ цинкъ и мѣдь образовали пластъ латуни въ $^1/_4$ милиметра толщиною, а пáра свинецъ—олово сплавилась на толщину въ 6 милиметровъ. Наконецъ металлы, не имѣющіе свойства взаимно растворяться (цинкъ и свинецъ, цинкъ и висмутъ), дали только слѣдъ соединенія, безо всякой прочности.

Совокупность этихъ фактовъ ясно показываетъ, что твердыя тѣла способны диффундировать другъ въ другѣ, и что эта диффузія играетъ важную роль въ явленіи спаиванія.

---

[1]) *Bull. de l'Acad. royale de Belgique,* 3-e série, t. XXVIII, p. 23; 1894.

[2]) *Jd.,* 3-e série, t. XXX, p. 311; 1895.

Вышеизложенное—не единственное доказательство, которымъ мы обладаемъ. Мы уже упомянули, что диффузія твердыхъ тѣлъ была наблюдаема многими физиками.

A. Colson [1]) показалъ, что желѣзо, согрѣтое въ сажѣ, диффундируетъ въ послѣдней; и наоборотъ, углеродъ—въ желѣзѣ. Такъ какъ диффузія не могла быть констатирована съ платиной, при тѣхъ же условіяхъ, то Colson заключилъ, что необходимо нѣкоторое сродство между твердыми тѣлами, какъ и между жидкими, чтобы диффузія имѣла мѣсто. Далѣе, онъ показалъ, что хлористое серебро диффундируетъ въ хлористомъ натрѣ; что серебро соединяется, отчасти, съ хлористымъ натріемъ, образуя хлористое серебро, которое затѣмъ диффундируетъ; что полированное сѣрнистое желѣзо, нагрѣтое на мѣди, уступаетъ небольшія количества сѣры, которыя сейчасъ же укрѣпляются въ мѣди. Нитка платины, нагрѣтая въ тиглѣ, наполненномъ сажею, не заключающая первоначально кремнія, становится *кремнистой* по истеченіи нѣкотораго времени.

Подобныя наблюденія были произведены Violl'емъ [2]) во время плавленія палладія въ фарфоровомъ тиглѣ, погруженномъ въ тигель изъ графита. Внѣшняя сторона фарфороваго тигля стала похожей на уголь. Чѣмъ продолжительнѣе было нагрѣваніе, тѣмъ глубже получался слой.

Диффузія углерода была также констатирована Sydney Marsden'омъ [3]) и Pernolet'омъ [4]).

Въ 1888 году Spring [5]) констатировалъ диффузію въ твердыхъ тѣлахъ посредствомъ химическихъ явленій. Онъ задѣлывалъ въ стеклянную трубку, хорошо высушенную, сулему (хлорную ртуть) и хлорную мѣдь въ порошкѣ, а въ другую трубку азотнокислый калій и уксуснокислый натрій, абсолютно сухіе. По истеченіи нѣкотораго времени, первая трубка содержала каломель (хлористую ртуть) и полухлорную мѣдь, и вторая — уксусно. кислый калій и азотнокислый натрій. Жидкое состояніе, слѣдовательно, не всегда необходимо для совершенія химическаго процесса при низкой температурѣ; внутри твердой матеріи, какъ и въ жидкой, происходитъ движеніе, которое, хотя и значительно слабѣе, но отнюдь не сводится къ нулю

Наиболѣе убѣдительная работа по диффузіи металловъ была. произведена, въ 1896 году, сэромъ W. Roberts-Austen'омъ [6]), ученымъ директоромъ лондонскаго монетнаго двора. Авторъ из-

[1]) *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 1074—1076; 1881, и t. XCIV, p. 26—28; 1882.

[2]) *Comptes rendus*, t. XCIV, p. 28; 1882.

[3]) *Ann. de Chimie et de Physique*, (5), t. XXVI, p. 286; 1882.

[4]) *Comptes rendus*, t. XCIV, p. 99; 1882.

[5]) *Zeitschrift für phys. Chemie*, t. II, p. 536; 1888.

[6]) *Phil. Frans.*, t. CLXXXVII, p. 383—415; 1896.

мѣрилъ сперва скорость диффузіи различныхъ металловъ, при постоянной температурѣ, въ другомъ расплавленномъ металлѣ; онъ установилъ, что послѣдняя удовлетворяетъ закону Fick'a:

$$\frac{dv}{dx} = K\frac{d^2v}{dt^2}$$

— и что скорость диффузіи металловъ значительно больше скорости диффузіи солей.

Во второй части своей работы Roberts-Austen занялся диффуей металловъ въ твердыхъ металлахъ, въ особенности дифсузіей золота въ свинцѣ. Чтобы констатировать ее, онъ помѣстилъ золотой цилиндръ на свинцовую полосу, и оставилъ ихъ ткаъ въ такомъ положеніи на 31 день; при этомъ онъ мѣнялъ температуру. Онъ убѣдился, что диффузія замѣтна уже при 40^0. Онъ нашелъ также, что диффузія золота въ серебрѣ при 800^0 такова же, какъ и диффузія золота въ свинцѣ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Какихъ результатовъ можно требовать отъ преподаванія элементарной алгебры, и какъ ее слѣдуетъ излагать.

Приватъ-Доцента В. Лермантова въ С.-Петербургѣ.

(Окончаніе [1]*).*

Все это необходимо имѣть въ виду и при изложеніи начальной алгебры. Еще царь Соломонъ высказалъ правило: „невѣжда не внемлетъ словамъ науки, если они не отвѣчаютъ на вопросъ, уже зародившійся въ сердцѣ его“. А мы держимъ учениковъ цѣлый годъ на алгебраическихъ преобразованіяхъ, даже не указывая имъ, для чего нужно умѣніе ихъ дѣлать. Такая система изложенія, какой придерживаются у насъ обыкновенно, имѣетъ историческое основаніе: такъ изложена алгебра въ первой части классическихъ учебниковъ парижской Политехнической Школы. Но въ этомъ высшемъ училищѣ всегда доходили въ математикѣ до высшихъ степеней знанія, поэтому было цѣлесообразно упражнять силы начинающихъ надъ выкладками элементарнаго характера, знаніе которыхъ пригодится имъ въ слѣдующіе годы **). А изъ учениковъ 3-го и 4-го классовъ нашихъ гимназій

---

[1]) См. № 292 „Вѣстника“.

**) Не надо забывать и того, что въ Политехническую Школу поступаютъ одни способные, по строгому конкурсному экзамену изъ математики.

до изученія высшей алгебры дойдутъ весьма немногіе, другимъ же придется или забыть всю свою алгебру или примѣнять ее къ техническимъ вычисленіямъ, т. е. главнымъ образомъ подставлять численныя данныя въ готовую буквенную формулу да изрѣдка рѣшать простенькія уравненія. Умѣніе преобразовывать формулы понадобится тѣмъ, кто будетъ изучать аналитическую геометрію и высшій анализъ, т. е. во время пребыванія въ высшемъ учебномъ заведеніи, гдѣ не очень-то надѣются на гимназическую подготовку и напоминаютъ самыя нужныя статьи. Зачѣмъ же истязать всѣхъ дѣтей, способныхъ и неспособныхъ, дѣйствіями надъ большими многочленами, извлеченіями корней изъ многочленовъ, нахожденіемъ общаго наибольшаго дѣлителя, непрерывными дробями, биномомъ Ньютона и особенно Діофантовымъ анализомъ, теоріею способа предѣловъ и нахожденіемъ наибольшихъ и наименьшихъ величинъ искусственными пріемами въ доступныхъ частныхъ случаяхъ? Несравненно цѣлесообразнѣе было бы замѣнить эти статьи, примѣняющіяся лишь въ высшей Алгебрѣ или вовсе нигдѣ не примѣнимыя, основаніями аналитической геометріи, и даже „horibile dictu“, начатками дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Вѣдь графическій методъ примѣняется теперь даже въ статистикѣ и кривыя разнаго рода попадаются и въ газетныхъ статьяхъ и на выставкахъ, надо же имѣть о немъ понятіе ученикамъ, прошедшимъ курсъ элементарной математики.

На основаніи этихъ соображеній я придерживался для своего курса слѣдующей системы: начальная алгебра должна научать умѣнію рѣшать задачи при помощи уравненій, и искусство дѣлать преобразованія и разныя алгебраическія дѣйствія—надо сообщать лишь по мѣрѣ того, какъ въ нихъ является надобность. Это не цѣль, а средства начальной алгебры. Мелкимъ шрифтомъ, чтобы не считали долгомъ зазубрить, надо напечатать тѣ классные разговоры, которыми хорошій учитель освѣщаетъ значеніе сообщаемыхъ научныхъ фактовъ. Объяснивъ въ введеніи, (о которомъ сказано, что его заучивать не надо), „чему можно научиться изъ этой книжки, какъ ею пользоваться, и чѣмъ она отличается отъ другихъ“, въ I главѣ я говорю о томъ „для какой цѣли придумана алгебра и каковы основныя положенія этой науки“. *) Понятіе объ отрицательныхъ величинахъ я представляю какъ условное, удобное правило, не противорѣчащее здравому смыслу. Болѣе полное опредѣленіе я считаю здѣсь неумѣстнымъ и излишнимъ; объ этомъ надо распространяться въ старшихъ классахъ, когда ученики достаточно созрѣли для пониманія тонкостей отвлеченнаго мышленія. Въ такомъ же духѣ проведено изложеніе II главы: „какъ обращаться съ уравненіями первой степени и находить ихъ рѣшенія“. Въ этой главѣ по пути намѣчено нѣсколько правилъ и формулъ, которыя будутъ встрѣчаться

---

*) Выраженіе: „придумана“, не понравившееся моему Рецензенту, давно употребляется авторами. Такъ Höfer, въ своей Histoire des mathématiques озаглавливаетъ статью: „Diophante a—t—il inventé l'algèbre“?

и дальше, и намѣренно не высказаны сразу во всей ихъ полнотѣ, а лишь постольку, поскольку нужны въ этомъ мѣстѣ. Въ III главѣ, „какъ составлять уравненія, соотвѣтствующія даннымъ задачи“, у меня высказано значительно больше, чѣмъ въ настоящихъ алгебрахъ: я уясняю, по мѣрѣ возможности, какія формы уравненія соотвѣтствуютъ извѣстнымъ зависимостямъ между данными задачи, выражаемымъ словами въ заданіи, каковы: пропорціональность, сумма или разность, пропорціональность разностей. Тутъ же я указываю на понятіе о „функціи“ и на значеніе этого понятія для выраженія законовъ природы. Конечно, во всей своей полнотѣ эти понятія еще недоступны ученикамъ, поэтому я лишь знакомлю ихъ съ этими понятіями и указываю на ихъ цѣлесообразность и пользу. Въ IV и V главахъ разсматриваются въ томъ же духѣ совокупность уравненій первой степени и уравненія второй степени. Въ VI главѣ, за безсвязность которой упрекаетъ меня Рецензентъ, собраны нѣкоторыя употребительныя формулы и особые виды уравненій: выраженіе ариѳметическаго средняго, случай, когда дана сумма и разность двухъ неизвѣстныхъ, пропорціи и прогрессіи. Это дѣйствительно простое собраніе замѣчательныхъ частныхъ случаевъ примѣненія общихъ правилъ алгебры; органическую связь между ними найти трудно, помимо вышеуказанной. Въ этой главѣ я помѣстилъ необычное изложеніе ученія о прямой и обратной пропорціональности, уже испробованное мною надъ многими изъ нашихъ практикантовъ: каждый годъ мнѣ приходилось втолковывать кому либо это понятіе по поводу примѣненія закона Маріота, и этотъ способъ изложенія всѣ легко понимали. Методъ логариѳмовъ, въ главѣ VII, у меня тоже изложенъ своеобразно: пользуясь тѣмъ, что самое вычисленіе таблицъ считаютъ обыкновенно выше разума учениковъ, я посмотрѣлъ на дѣло съ чисто практической стороны, и Рецензентъ мой оказалъ мнѣ хорошую услугу, цитируя это мѣсто, какъ примѣръ моего изложенія: я самъ, пожалуй, выбралъ бы это мѣсто, какъ самое характерное и понятное для „свободныхъ отъ наукъ“ читателей.

Дополненія изложены мною лишь „страха ради іудейска“. Написавъ первую часть, я сравнилъ ее съ существующими программами и увидалъ, что такая книжка никому не будетъ нужна и что поэтому ее необходимо дополнить. Поэтому-то въ дополненіи у меня изложеніе нѣсколько короче, чѣмъ въ основной части: дополненія эти будутъ изучать уже знающіе суть элементарной алгебры.

Курсъ старшихъ классовъ я не затрагивалъ: тамъ ученики уже взрослые, ихъ слѣдуетъ пріучить къ пониманію обычнаго языка математическихъ книгъ и для нихъ многіе изъ существующихъ учебниковъ вполнѣ пригодны.

Теперь остается оправдать особенности моего языка и изложенія, выяснить критерій „понятности и непонятности“. Для „младенцевъ“ и для „мудрецовъ“ этотъ критерій совершенно разли-

ченъ. Знающій алгебру не можетъ отрѣшиться отъ этого знанія; читая чужое изложеніе онъ невольно сравниваетъ его со своимъ: сказано тѣми же словами, значитъ понятно: не надо ни малѣйшаго усилія ума для пониманія. Если слова отличаются немного, ихъ понять не трудно. Если же изложено по новому, особенно если взята новая точка исхода, то изложеніе не понятно. Дѣйствительно, „если я, глубоко знающій свою науку, долженъ напрягать свой умъ, чтобы понять, какъ же поймутъ новички? Но свободный отъ наукъ читатель относится къ дѣлу иначе: онъ новую идею относитъ къ тѣмъ ассоціаціямъ идей, которыя уже имѣются у него въ головѣ и вполнѣ отличны отъ ассоціацій идей головы „мудреца". Этимъ-то требованіямъ читателя, свободнаго отъ алгебраической науки, я и старался удовлетворить, насколько я ихъ понималъ; поэтому настоящими судьями понятности моего изложенія могутъ быть лишь ученики. Эксперименты такого рода я уже дѣлалъ: во время писанія книжки я давалъ читать начало мальчику еще не начинавшему изучать алгебру и приготовлявшемуся въ 3-й классъ гимназіи. Послѣ 3—4 недѣль легкихъ занятій, знаніями пройденныхъ началъ алгебры остался доволенъ опытный преподаватель, нарочно проэкзаменовавшій его. Другія статьи я давалъ читать ученицѣ старшаго класса женской гимназіи; она безъ моей помощи рѣшала многія задачи, между прочимъ и извлекала корни изъ чиселъ, послѣ прочтенія того мѣста, изъ котораго, по мнѣнію моего Рецензента, учащійся ничего не пойметъ. (А въ гимназіи извлеченія корней „не было"). Этотъ успѣхъ я не могу приписать особой способности объектовъ эксперимента: я полагаю, что не слѣдуетъ только въ изложеніи начатковъ ученія „соблазнять малыхъ сихъ" сообщеніемъ тонкостей, ведущихъ къ сомнѣніямъ, пока ими еще не усвоено ничего, и такое изложеніе пойметъ всякій внимательный неидіотъ. Затрудненія начинаются лишь впослѣдствіи: все дальнѣйшее изложеніе математическихъ предметовъ основывается на знаніи и усвоеніи предыдущаго; какъ только это условіе не исполнено, дальнѣйшее становится непонятнымъ. Бываютъ ученики, вообще довольно ограниченныхъ способностей, легко запоминающіе математическіе факты,—такимъ изученіе математическихъ предметовъ дается легко, ихъ считаютъ въ школѣ способными къ математикѣ, но изъ нихъ вырабатываются не настоящіе ученые, двигатели своей науки, а тѣ, ничего кромѣ своего предмета не понимающіе профессора, которыхъ изображаютъ въ нѣмецкихъ карикатурахъ. Напротивъ того другіе ученики, вообще болѣе одаренные, но не обладающіе хорошею памятью для формулъ, скоро отстаютъ и приходятъ часто къ ложному убѣжденію въ своей неспособности къ математикѣ.

Мнѣ могутъ возразить, что я такимъ образомъ слишкомъ принижаю уровень требованій, что многіе учителя достигаютъ вполнѣ точныхъ отвѣтовъ и на вопросы, касающіеся того, что я считаю излишними тонкостями. На это, я укажу лишь на привычку „хорошихъ учениковъ" дѣлать и говорить „точно такъ,

какъ учитель хочетъ". Можно достигнуть того, что ученики будутъ повторять всякія слова, сказанныя учителемъ; но въ младшихъ классахъ это будутъ одни слова, а не пониманіе; стоитъ задать вопросъ иначе, особенно если спрашивать будетъ посторонній, и непониманіе тонкостей обнаружится. Лишь въ старшихъ классахъ многіе почти взрослые ученики уже способны понимать отвлеченныя понятія; поэтому-то я и считаю обычное изложеніе цѣлесообразнымъ для этихъ классовъ. Къ тому же оно пріучаетъ понимать авторовъ математическихъ книгъ, а это можетъ принести пользу тѣмъ немногимъ, которые пожелаютъ заняться такимъ чтеніемъ.

Что же касается до самообученія, то жестоко ошибаются тѣ, которые полагаютъ, что для этой цѣли нужно пространное, многословное изложеніе, какое ученики называютъ „размазаннымъ". Самоучкѣ необходимы тѣ освѣщающія излагаемые факты и правила указанія, которыя хорошій учитель сообщаетъ въ классныхъ разговорахъ, но которыя почему-то не принято помѣщать въ книги. Безъ этого у самоучки является сомнѣніе: нужно-ли все это? Быть можетъ, учитель все трудное вычеркнулъ бы! Если слабосильный станетъ учиться самоучкою, онъ, конечно, недоучится, а болѣе быстро схватывающій пойметъ всякое изложеніе, лишь бы оно не было основано на предположеніи, что читатель знаетъ то, чего онъ въ дѣйствительности не знаетъ. Вообще, наше учащееся юношество страдаетъ скорѣе отсутствіемъ должной степени вниманія, чѣмъ вялостью пониманія; поэтому изложеніе „размазанное" для него оказывается менѣе удобопонятно, чѣмъ сжатое, но содержащее все, что нужно сказать. Стараясь вездѣ, гдѣ нужно, помѣщать такія освѣщающія указанія, я считаю себя въ правѣ назначать свою книжку „для самообученія и школъ". Для самообученія нуженъ еще сборникъ задачъ съ полными рѣшеніями; я помѣстилъ довольно много типическихъ задачъ такого рода для примѣра, но самъ указываю, что ихъ недостаточно, и что надо еще достать задачникъ. Такъ какъ задачниковъ съ полными рѣшеніями и безъ нихъ очень много, и всѣ они болѣе или менѣе пригодны, то я считалъ излишнимъ составлять новый.

Замѣчу кстати, что составить чисто практическій элементарный сборникъ алгебраическихъ задачъ едва ли возможно. Я пытался собирать для этого свѣдѣнія; оказалось, что всѣ задачи, дѣйствительно встрѣчающіяся въ технической практикѣ, до того просты съ алгебраической стороны, что на всѣ правила не пріискать и примѣровъ. Въ примѣненіяхъ алгебры къ техникѣ все сводится къ подстановкамъ численныхъ значеній въ готовую формулу; лишь изрѣдка приходится рѣшать самому такую формулу относительно какой либо буквы, если она входитъ въ нее неявнымъ образомъ, а почему либо надо узнать ея значеніе, когда другія даны. Такой задачникъ—справочная книга будетъ скорѣе задачникомъ ариѳметическимъ, чѣмъ алгебраическимъ. Если же выбирать упражненія изъ самыхъ выводовъ формулъ механики, строительнаго искусства, физики, астрономіи и т. п., то придется

излагать почти цѣликомъ эти науки, иначе ученики не будутъ понимать заданіе и все сведется къ рѣшенію такихъ же отвлеченныхъ, буквенныхъ примѣровъ.

Вышеизложенныя мысли, руководившія мною при выборѣ способовъ изложенія разныхъ статей моей книжки, даютъ отвѣты на всѣ почти пункты, которые вмѣняетъ мнѣ въ вину мой почтенный Рецензентъ. Остаются лишь неправильныя заключенія, которыя онъ считаетъ возможнымъ вывести изъ нѣкоторыхъ моихъ опредѣленій. Книжку свою я написалъ для начинающихъ, это не трактатъ объ алгебрѣ, а начальный учебникъ. Поэтому я увѣренъ, что никто изъ моихъ настоящихъ читателей такихъ рискованныхъ заключеній изъ моихъ словъ не сдѣлаетъ, а поэтому и вреда они не принесутъ. Дойдя до старшихъ классовъ, ученики своевременно узнаютъ, что многія изъ сообщенныхъ имъ понятій имѣютъ болѣе обширное значеніе и требуютъ болѣе общихъ и сложныхъ опредѣленій. А въ началѣ курса такія обобщенія были бы для учениковъ пустыми словами, лишь затемняющими пониманіе.

У меня навѣрное найдется не мало промаховъ, неясностей и пропусковъ, которыхъ Рецензентъ мой не замѣтилъ, но я надѣюсь, что крупныхъ ошибокъ нѣтъ. Причина такого самомнѣнія очень проста: мои математическія знанія не глубоки: я не спеціалистъ по математикѣ, поэтому, не полагаясь на свою память, я постоянно справлялся съ немногими основательными учебниками и не допускалъ разногласія въ результатахъ. Такъ, принятое мною новое опредѣленіе одночлена и многочлена оказалось согласно съ идеями Пр. Ермакова, высказанными имъ въ его „Лекціяхъ о преподаваніи Алгебры“.

Что же касается до языка и точности выраженій, то я не могу не согласиться съ Рецензентомъ, что точнѣе было бы сказать: „уравненіе, приведенное къ общему виду“, чѣмъ „общее уравненіе“, и—„подобрать такой показатель степени“ вмѣсто „такую степень“, хотя никого изъ учениковъ такія вольности слога не смутятъ. Я пытался сначала (тоже „страха ради“) излагать обычнымъ „суконнымъ“ языкомъ нашихъ учебниковъ, но мнѣ достаточно было прочитать въ слухъ начало упомянутымъ выше дѣтямъ, чтобы почувствовать, что такъ писать не слѣдуетъ, и я перешелъ къ болѣе вольной обычной разговорной рѣчи. Дѣло школы пріучить воспитанниковъ къ пониманію книжнаго отвлеченнаго языка, но это надо дѣлать постепенно. Въ началѣ обязательно пользоваться лишь разговорными знакомыми ученику словами и формами рѣчи, а термины и условныя выраженія вводить по мѣрѣ ихъ объясненія. Иначе мы напрасно прибавимъ къ трудностямъ пониманія предмета еще и трудности пониманія оборотовъ рѣчи.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Спектръ радія. Въ позапрошломъ году Демарсэ, изслѣдуя спектръ того препарата (съ хлористымъ баріемъ), который послужилъ г-амъ Кюри для открытія новаго источника лучистой энергіи (лучи Беккереля), нашелъ въ немъ, кромѣ извѣстныхъ линій барія, еще 15 новыхъ, принадлежащихъ, по его мнѣнію, новому элементу—радію. Извѣстный спеціалистъ по спектральному анализу К. Рунге, который, совмѣстно съ Г. Кейзеромъ, далъ въ высшей степени обстоятельныя спектры многихъ элементовъ, считалъ изслѣдованія Демарсэ не вполнѣ точными, и самъ занялся изученіемъ спектра радія и нашелъ, что, во-первыхъ, 7 линій, приписываемыхъ радію, принадлежатъ барію, какъ показали ранѣе изслѣдованія Кейзера и Рунге; во-вторыхъ, 5 линій онъ не могъ найти и, въ третьихъ, только 3 линіи съ длинами волнъ 0^{μ},482614; 0^{μ}4682346; 0^{μ},3814591 принадлежатъ новому элементу—радію. При этихъ наблюденіяхъ Рунге, по совѣту Пашена, накаливалъ изслѣдуемое вещество не въ пламени бунзеновой горѣлки, а, обернувъ его платиновой проволокой, электрическимъ токомъ. Тѣ же три новыхъ линіи Рунге наблюдалъ и въ другомъ препаратѣ радія (съ бромистымъ баріемъ).

Пр.-Доц. П. Грузинцевъ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Назначенія молодыхъ ученыхъ [redacted] Казанскаго Университета. Приватъ-доцентъ Казанскаго университета М. С. Сегель назначенъ Адъюнктъ-Профессоромъ Рижскаго Политехническаго Института. Пользуясь этимъ случаемъ, мы не можемъ не обратить вниманія читателей на цѣлый рядъ назначеній, которыхъ были удостоены молодые ученые Казанскаго университета въ теченіе послѣднихъ двухъ лѣтъ. Приватъ-Доцентъ П. П. Граве назначенъ профессоромъ Юрьевскаго университета по каѳедрѣ чистой математики; Приватъ-Доцентъ А. В. Красновъ профессоромъ Варшавскаго университета по каѳедрѣ астрономіи; Приватъ-Доцентъ А. П. Котельниковъ—профессоромъ Кіевскаго Политехническаго Института по каѳедрѣ механики; Приватъ-Доцентъ А. В. Нечаевъ —профессоромъ того же института по каѳедрѣ чистой математики; Приватъ-Доцентъ Д. М. Синцовъ—профессоромъ Высшаго Горнаго Училища по каѳедрѣ чистой математики; наконецъ, по той же каѳедрѣ назначенъ В. Л. Некрасовъ въ Томскій Технологическій Институтъ. Физико-Математическій Факультетъ Казанскаго Университета оказался истиннымъ разсадникомъ ученыхъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

„Курсъ приложеній дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія къ геометріи". Элементы теоріи поверхностей.

Лекціи, читанныя въ Императорскомъ Университетѣ Св. Владиміра ординарнымъ профессоромъ **Б. Я. Букрѣевымъ.** IV+304+III стр. 8⁰. Кіевъ. 1900.

Въ каждомъ курсѣ Анализа имѣется отдѣлъ, посвященный приложеніямъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія къ геометріи. Размѣръ этого отдѣла, однако, находится обыкновенно въ зависимости отъ общаго характера сочиненія и потому получаетъ обстоятельное развитіе только въ обширныхъ трактатахъ по Анализу. Въ иностранной литературѣ имѣются, поэтому, самостоятельныя сочиненія, посвященныя исключительно приложеніямъ анализа безконечно малыхъ къ геометріи. Одни изъ этихъ сочиненій носятъ элементарный характеръ, какъ напримѣръ, *Joachimsthal* „Anwendungen der Differenzial und Jntegralrechnung auf die Geometrie" и прекрасная новая книга *Raffi* „Leçons sur les applications de l'Analyse à la Géométrie"; другія представляютъ собой научные трактаты; между послѣдними первое мѣсто занимаетъ классическое сочиненіе *G. Darboux* „Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitesimal"

Въ русской литературѣ, насколько намъ извѣстно, не было такихъ сочиненій, если не считать небольшой статьи покойнаго академика Имшенецкаго, приложенной къ его переводу учебника для дифференціальнаго исчисленія Tothundter'a.

Книга профессора Букрѣева пополняетъ такимъ образомъ замѣтный пробѣлъ въ нашей литературѣ. Она содержитъ изложеніе общей теоріи поверхностей и кривыхъ, на нихъ расположенныхъ. Особенно обстоятельно изложены теоріи геодезическихъ линій, изображеніе одной поверхности на другой, гауссова теорія кривизны; въ связи съ послѣдней, подробно разобраны обѣ задачи объ изгибаніи поверхностей и геометрія на поверхностяхъ постоянной кривизны.

Представляя собой обработку курса, читаннаго студентамъ, сочиненіе г. Букрѣева не требуетъ слишкомъ большой подготовки и доступно всякому читателю, обладающему элементарными свѣдѣніями по Анализу.

„Аналитическая Геометрія". Курсъ лекцій Заслуженнаго Ординарнаго профессора **В П. Ермакова**, *читанный въ Университетѣ Св. Владиміра и въ Политехническомъ Институтѣ Императора Александра II* въ 1899 и 1900 годахъ. Часть первая. „Геометрія на плоскости". 120 стр. 8⁰. Ц. 1 р. 20 к. Часть вторая. „Геометрія трехъ измѣреній". 208 стр. Ц. 2 р.

При сравнительно небольшомъ объемѣ эта книга содержитъ

весьма обстоятельное изложеніе университетскаго курса аналитической геометріи. Изъ учебника исключены всѣ частности, всѣ отдѣлы, которыхъ студентамъ почти никогда не приходится примѣнять, какъ напр., методъ сокращенныхъ обозначеній, трилинейныя координаты и т. п. За то, всѣ существенные отдѣлы аналитической геометріи изложены очень ясно и достаточно подробно. Противъ обыкновенія, геометріи трехъ измѣреній удѣлено больше мѣста, чѣмъ геометріи на плоскости; но это именно тѣмъ и объясняется, что авторъ тщательно избѣгаетъ всякаго матеріала, безъ котораго студентъ можетъ обойтись. Только послѣдняя глава первой части (Подобіе фигуръ) и двѣ послѣднія главы второй части (Софокусныя линіи и поверхности второго порядка,—гармоническое дѣленіе и поляры) содержатъ немногія дополнительныя статьи. Въ первой части авторъ обходится безъ детерминантовъ; во второй части они мѣстами появляются, но чисто формально, какъ символы для сокращеннаго обозначенія соотвѣтствующихъ формулъ.

Среди учебниковъ, имѣющихъ скромную задачу научить начинающаго математика основамъ аналитической геометріи, книга проф. Ермакова займетъ, по нашему мнѣнію, выдающееся мѣсто не только въ русской, но и въ европейской литературѣ предмета.

Изъ періодической печати. Въ „Кіевскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ" за истекшій и текущій годъ печатается обширный курсъ механики проф. **Г. Н. Суслова** подъ заглавіемъ: „*Основы аналитической механики*".

Въ томъ же журналѣ за истекшій годъ отпечатанъ обширный курсъ „Химической Технологіи" проф. **Н. А. Бунге**.

Вышедшая на дняхъ IV книжка 21-го тома „Математическаго Сборника" вся занята изслѣдованіемъ, принадлежащимъ попечителю Московскаго Учебнаго Округа, проф. **П. А. Некрасову**, „Новыя основанія ученія о вѣроятностяхъ суммъ и среднихъ величинъ".

ЗАДАЧИ.

XVIII. Даны два круга O и O', имѣющіе внутреннее прикосновеніе въ точкѣ A (кругъ O' лежитъ внутри круга O). Нѣкоторая касательная къ кругу O' встрѣчаетъ окружность круга O въ точкахъ B и C. Найти геометрическое мѣсто центра круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC.

(Заимств.).

XIX. Найти общій видъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ x и y, такихъ, чтобы выраженіе

$$a^x - a^y,$$

гдѣ $x > y$, при всякомъ цѣломъ значеніи a дѣлилось на данное цѣлое число $M = 2^p \alpha^q \beta^r \ldots \gamma^s$, гдѣ числа $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ предполагаются первоначальными *).

Е. Буницкій (Одесса).

*) Рѣшеніе задачи предполагаетъ основныя свѣдѣнія изъ теоріи чиселъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 22 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$4x^2+5=(2x^2+1)(5y^2-17).$$

Н. С. (Одесса).

№ 23 (4 сер.). Доказать, что число

$$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$$

при n цѣломъ и не меньшемъ нуля дѣлится на 23.

(Заимств.).

№ 24 (4 сер.). Пусть $f(x,y)$ обозначаетъ цѣлый относительно x и y многочленъ съ цѣлыми коэффиціентами. Дано, что числа $f(3,5)$, $f(4,7)$, $f(1,11)$ кратны 420. Доказать, что число $f(43,25)$ также дѣлится на 420.

Е. Буницкій (Одесса).

№ 25 (4 сер.). Нѣкоторую точку M данной окружности соединяютъ прямыми съ двумя точками A и B той же окружности. На прямой AM отъ точки A и на прямой BM отъ точки B откладываютъ постоянныя длины $AC=m$, $BD=n$. Найти геометрическое мѣсто средины прямой CD.

(Заимств.).

№ 26 (4 сер.). Даны плоскость P и двѣ прямыя RR' и SS', не лежащія въ одной плоскости. Перемѣнный отрѣзокъ AB скользитъ концами своими A и B по прямымъ RR' и SS', оставаясь параллельнымъ плоскости P. На отрѣзкѣ AB опредѣляютъ точку M такъ, что отношеніе $\frac{AM}{MB}$ сохраняетъ постоянное значеніе. Найти геометрическое мѣсто точки M.

(Заимств.).

№ 27 (4 сер.). Передъ чечевицей помѣщенъ кружокъ перпендикулярно къ ея оси и концентрически съ ней. На экранѣ, отстоящемъ на 3 метра отъ кружка, получается изображеніе кружка, причемъ площадь этого изображенія въ 4 раза больше площади кружка. Требуется опредѣлить главное фокусное разстояніе чечевицы.

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 565 (3 сер.). *Черезъ точку M, взятую внутри треугольника ABC, проводятся параллели къ сторонамъ BC, CA, AB, пересѣкающія AB и CA въ α и α_1, BC и AB въ β и β_1, CA и BC въ γ и γ_1. Пусть Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 будутъ площади треугольниковъ ABC, $M\beta\gamma_1$, $M\gamma\alpha_1$, $M\alpha\beta_1$, A и P_1, P_2, P_3 — площади параллелограммовъ $A\beta_1M\beta$, $B\gamma_1M\alpha$, $C\alpha_1M\beta$. Доказать соотношенія (a, b, c — стороны треугольника):*

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a}+\frac{\beta\beta_1}{b}+\frac{\gamma\gamma_1}{c}=2,\ \frac{\beta\gamma_1}{a}+\frac{\gamma\alpha_1}{b}+\frac{\alpha\beta_1}{c}=1,$$

$$\sqrt{\Delta_1}+\sqrt{\Delta_2}+\sqrt{\Delta_3}=\sqrt{\Delta},$$

$$P_1+P_2+P_3=2\left(\sqrt{\Delta_1\Delta_2}+\sqrt{\Delta_2\Delta_3}+\sqrt{\Delta_3\Delta_1}\right).$$

Изъ подобія треугольниковъ $M\gamma_1\beta$ и ABC слѣдуетъ:

$$\frac{\beta\gamma_1}{a}=\frac{M\gamma_1}{c}=\frac{\alpha B}{c}.$$

Точно также найдемъ, что

$$\frac{\gamma\alpha_1}{b}=\frac{M\gamma}{c}=\frac{\beta A}{c}.$$

Поэтому

$$\frac{\beta\gamma_1}{a}+\frac{\gamma\alpha_1}{b}=\frac{\alpha B+\beta_1 A}{c}=\frac{c-\alpha\beta_1}{c}=1-\frac{\alpha\beta_1}{c}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{\beta\gamma_1}{a}+\frac{\gamma\alpha_1}{b}+\frac{\alpha\beta_1}{c}=1 \qquad (1).$$

Изъ тожества $a=B\gamma_1+C\beta+\gamma_1\beta=\alpha M+M\alpha_1+\beta\gamma_1=\alpha\alpha_1+\beta\gamma_1$

и аналогичныхъ ему двухъ другихъ тожествъ находимъ;

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a}=1-\frac{\beta\gamma_1}{a},\ \frac{\beta\beta_1}{b}=1-\frac{\gamma\alpha_1}{b},\ \frac{\gamma\gamma_1}{c}=1-\frac{\alpha\beta_1}{c}.$$

Поэтому (см. (1))

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a}+\frac{\beta\beta_1}{b}+\frac{\gamma\gamma_1}{c}=3-\left(\frac{\beta\gamma_1}{a}+\frac{\gamma\alpha_1}{b}+\frac{\alpha\beta_1}{c}\right)=2.$$

Изъ подобія треугольниковъ $M\gamma_1\beta$ и ABC слѣдуетъ:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\overline{\gamma_1\beta}^2}{a^2},\text{ или }\frac{\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta}}=\frac{\beta\gamma_1}{a}.$$

Точно также найдемъ

$$\frac{\sqrt{\Delta_2}}{\sqrt{\Delta}}=\frac{\gamma\alpha_1}{b},\ \frac{\sqrt{\Delta_3}}{\sqrt{\Delta}}=\frac{\alpha\beta_1}{c}.$$

Поэтому (см. (1))

$$\frac{\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta}}+\frac{\sqrt{\Delta_2}}{\sqrt{\Delta}}+\frac{\sqrt{\Delta_3}}{\sqrt{\Delta}}=\frac{\beta\gamma_1}{a}+\frac{\gamma\alpha_1}{b}+\frac{\alpha\beta_1}{c}=1,\text{ откуда}$$

$$\sqrt{\Delta_1}+\sqrt{\Delta_2}+\sqrt{\Delta_3}=\sqrt{\Delta}.$$

Возвышая въ квадратъ обѣ части послѣдняго равенства и перенося члены, не содержащіе радикала, въ одну и ту же часть равенства, получимъ.

$$\Delta-\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3=P_1+P_2+P_3=2\left(\sqrt{\Delta_1\Delta_2}+\sqrt{\Delta_2\Delta_3}+\sqrt{\Delta_3\Delta_1}\right).$$

П. Полушкинъ (Знаменка); *Н. С.* (Одесса).

№ 567 (3 сер.). *Доказать, что въ треугольникѣ средняя гармоническая разстояній основаній биссекторовъ внутреннихъ угловъ отъ сторонъ въ два раза больше средней гармонической высотъ.*

Пусть ABC—нѣкоторый треугольникъ, AD—биссекторъ внутренняго угла A; пусть $DE=DF$ суть соотвѣтственныя разстоянія основанія D биссектора AD отъ сторонъ AB и AC; назовемъ длину каждаго изъ этихъ разстояній черезъ α и обозначимъ стороны треугольника соотвѣтственно черезъ

a, b, c. Такъ какъ площадь s даннаго треугольника равна суммѣ площадей треугольниковъ ABD и ACD, то

$$a\alpha + b\alpha = 2s,$$

откуда

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a+b}{2s}.$$

Точно также

$$\frac{1}{\beta} = \frac{b+c}{2s},\ \frac{1}{\gamma} = \frac{c+a}{2s},$$

гдѣ β и γ—разстоянія отъ сторонъ основаній двухъ другихъ биссекторовъ.

Поэтому

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} = 2\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right),$$

гдѣ h_a, h_b, h_c — высоты треугольника.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Н. С.* (Одесса).

№ 574 (3 сер.). ***Рѣшить систему:***

$$(x+2y)\ (x+2z) = a^2,$$
$$(y+2x)\ (y+2z) = b^2,$$
$$(z+2x)\ (z+2y) = c^2.$$

Данную систему можно представить въ видѣ:

$$(x+y+z)^2 - (y-z)^2 = a^2,$$
$$(x+y+z)^2 - (z-x)^2 = b^2,$$
$$(x+y+z)^2 - (x-y)^2 = c^2,$$

откуда

$$y - z = \sqrt{s^2-a^2},\ z - x = \sqrt{s^2-b^2},\ x - y = \sqrt{s^2-c^2}, \qquad (1)$$

гдѣ

$$s = x + y + z \qquad (2).$$

Складывая равенства (1), находимъ

$$\sqrt{s^2-a^2} + \sqrt{s^2-b^2} + \sqrt{s^2-c^2} = 0,$$

откуда

$$3s^4 - 2(a^2+b^2+c^2)s^2 - [a^4+b^4+c^4 - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)] = 0.$$

Найдя s изъ этого биквадратнаго уравненія и подставивъ значеніе s въ равенства (2) и (1), находимъ x, y и z изъ системы уравненій первой степени.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 593 (3 сер.). *Доказать, что выраженіе*

$$\frac{a}{2\sin A}\sqrt{\frac{a\sin B\sin C}{\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}}},$$

гдѣ a — сторона треугольника, A, B, C его углы, r_a, r_b, r_c радіусы внѣвписанныхъ окружностей, есть средняя пропорціональная между радіусами круговъ вписаннаго и описаннаго.

Пусть b, c—двѣ другія стороны треугольника, s—его площадь, R и r—

радіусы круговъ описаннаго и вписаннаго.

Пользуясь формулами $r_a = \frac{s}{p-a}$, $r_b = \frac{s}{p-b}$, $r_c = \frac{s}{p-c}$, находимъ:

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{s^2(3p-a-b-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{s^2p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p^2.$$

Поэтому данное выраженіе приводится къ виду

$$\frac{a}{2\sin A}\sqrt{\frac{a\sin B\sin C}{p}}$$

или же къ выраженію

$$\sqrt{\frac{a^2\sin B\sin C}{4p\sin^2 A}} = \sqrt{\frac{a}{2\sin A}\cdot a\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\sin C}{2p}} = \sqrt{\frac{Rab\sin C}{2p}} =$$

$$= \sqrt{\frac{Rs}{p}} = \sqrt{Rr}.$$

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 626 (3 сер.). *Если A', B', C' суть соотвѣтственно точки касанія сторонъ BC, CA и AB треугольника ABC съ вневписанными окружностями, имѣющими центры въ I_a, I_b, I_c, то прямыя $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ пересѣкаются въ центрѣ окружности $I_a I_b I_c$.*

Прямыя AI_c и AI_b составляютъ продолженіе одна другой, такъ какъ онѣ суть биссектриссы двухъ вертикальныхъ угловъ, смежныхъ съ угломъ A треугольника ABC. Пусть AX есть биссектрисса угла A; такъ какъ прямыя I_bA и I_bB' соотвѣтственно перпендикулярны къ прямымъ AX и AC, то $\angle AI_bB' = \frac{\angle A}{2}$. Точно также найдемъ, что

$$\angle AI_cC' = \angle AI_bB' = \frac{\angle A}{2},\ \angle BI_cC' = \angle BI_aA' = \frac{\angle B}{2},$$

$$\angle CI_aA' = \angle CI_bB' = \frac{\angle C}{2} \qquad (1).$$

Такимъ образомъ прямыя I_bB' и I_cC' пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ O и образуютъ равнобедренный треугольникъ I_bOI_a, уголъ O котораго при вершинѣ равенъ (см. (1)) $\pi - (\angle AI_bB' + \angle AI_cC') = \pi - \angle A = \angle B + \angle C$.

Но

$$\angle I_b I_a I_c = \angle CI_aA' + \angle BI_a A' = \frac{\angle B + \angle C}{2}.$$

Слѣдовательно уголъ O при вершинѣ равнобедреннаго треугольника I_bOI_c вдвое болѣе угла $I_b I_a I_c$ треугольника $I_b I_a I_c$. Такимъ образомъ прямыя I_bB', I_cC', I_aA', пересѣкаются попарно въ центрѣ окружности, описанной около треугольника $I_a I_b I_c$, т. е. всѣ эти три прямыя проходятъ черезъ ея центръ.

П. Полушкинъ (Знаменка); *М. Милашевичъ* (Севастополь).

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 12-го марта 1901 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.